数学

班级:_____ 姓名:_____ 得分:_____

单元素养测评卷(一)

第六章

(时间:120 分钟　分值:150 分)

一、选择题:本题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. [2025·石景山期末] 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$,$\boldsymbol{b}=(m,4)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$,则 $m=$ (　　)

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

2. [2025·北京三十五中测试] 已知$\triangle ABC$ 中,$CA=3$,$CB=5$,$A=60°$,则 $\sin B=$ (　　)

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{3\sqrt{3}}{10}$

C. $\frac{5}{6}$　　D. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$

3. [2025·北京人大附中测试] 在矩形 $ABCD$ 中,E 是 BC 的中点,F 是 AE 上靠近 E 的三等分点,则向量 $\overrightarrow{DF}=$ (　　)

A. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$　　B. $\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$　　D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

4. [2024·东城期末] 设 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 为非零向量,下列结论中正确的是 (　　)

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$　　B. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$

C. $(2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(2\boldsymbol{b})$　　D. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2$

5. [2025·北京中学测试] 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,若 $a\cos B=b\cos A$,且 $a=b\sin C$,则$\triangle ABC$ 的形状是 (　　)

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 等腰直角三角形　　D. 不确定

6. [2025·昌平期末] 在$\triangle ABC$ 中,$A=\frac{\pi}{4}$,则"$\sin B<\frac{\sqrt{2}}{2}$"是"$a^2+b^2<c^2$"的 (　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

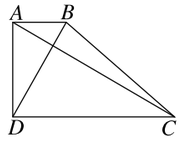
C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. [2024·海淀期末] 在平面直角坐标系 xOy 中,点 $A(-1,\sqrt{3})$,点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$,其中 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.若 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}|=\sqrt{5}$,则 $\theta=$ (　　)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

8. [2024·朝阳期末] 如图,在梯形 $ABCD$ 中,$AB\parallel DC$,$AC\perp BD$,$\angle BDC=\frac{\pi}{3}$,$AB=2$,$DC=6$,则 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角的余弦值为 (　　)



A. $\frac{\sqrt{7}}{14}$　　B. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$

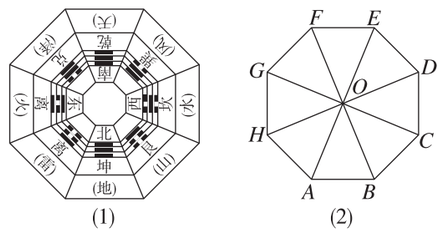
C. $\frac{\sqrt{21}}{14}$　　D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

9. [2025·北京二中测试] 已知$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,P 为平面 ABC 内一点,则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是 (　　)

A. -2　　B. $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{4}{3}$　　D. -1

10. [2024·丰台期末] 八卦是中国传统文化中的一部分,八个方位分别象征天、地、风、雷、水、火、山、泽八种自然现象.八卦模型如图(1)所示,其平面图形为正八边形,如图(2)所示,点 O 为该正八边形的中心,设 $|\overrightarrow{OA}|=1$,点 P 是正八边形 $ABCDEFGH$ 边上任一点,下列结论中正确的个数是 (　　)



(1)　　(2)

①$\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{BO}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$;

②$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\overrightarrow{DH}|$;

③$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OD}$ 上的投影向量为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e}$($\boldsymbol{e}$ 为与 $\overrightarrow{OD}$ 同向的单位向量);

④$\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PD}^2+\overrightarrow{PE}^2+\overrightarrow{PF}^2+\overrightarrow{PG}^2+\overrightarrow{PH}^2$ 的取值范围是 $[12+2\sqrt{2},16]$.

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

二、填空题:本题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. [2024·顺义期末] 在锐角三角形 ABC 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$a=1$,$b=2$,$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{15}}{4}$,则 $\cos C=$_____.

12. [2025·海淀期末] 智能机器人已开启快递代取服务,某机器人从某点出发开始工作,先沿正北方向前行 200 m,然后沿北偏西 60°方向继续前行了 300 m,则此时机器人与出发点的距离为_____ m.

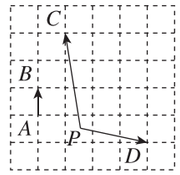
13. [2025·朝阳期末] 若两个非零向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$,则向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角是_____.

14. [2025·丰台期中] 在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,$A=\frac{\pi}{6}$,$b=2$.

①若 $c=\sqrt{3}$,则 $a=$_____;

②若$\triangle ABC$ 有两个解,则 a 的一个值可以为_____.

15. [2025·海淀期末] 某正方形网格纸是由 6×6 个边长为 1 的小正方形构成的,点 A,B,C,D 的位置如图所示,动点 P 在正方形网格纸内(包含边界),记 $t=(\overrightarrow{PC}+\lambda\overrightarrow{PD})\cdot\overrightarrow{AB}$($\lambda\in\mathbf{R}$).当 $\lambda=-1$ 时,$t=$_____;当 $\lambda=1$ 时,若动点 P 在小正方形的顶点上,则满足 $t=-2$ 的点 P 的个数为_____.



三、解答题:本题共 6 小题,共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (13 分)[2025·朝阳期末] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(x,4)$,$\boldsymbol{c}=(4,-x)$,且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$.

(1)证明:$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$;

(2)求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}$ 夹角的大小;

(3)求 $|\boldsymbol{a}-t(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})|(t\in\mathbf{R})$的最小值.

基础教育行业专研品牌 全品 SINCE 1992 30+年专注教育行业

17. (14 分)[2025·大兴期中] 已知平面四边形 $ABCD$ 满足 $AB=AD$，$BC=1$，$CD=\sqrt{3}$，且 $A=\dfrac{2\pi}{3}$.

(1)若 $\cos\angle CDB=\dfrac{\sqrt{33}}{6}$，求 $\angle CBD$ 的大小；

(2)若 $\angle ABC+\angle ADC=\pi$，求四边形 $ABCD$ 的面积.

18. (14 分)[2025·北京师大附中期中] 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $a\sin A=c\sin C+(b-c)\sin B$.

(1)求角 A；

(2)若 $a=7$，$c=5$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

(3)求 $\sin B+\sin C$ 的取值范围.

19. (14 分)[2024·通州期末] 在平面直角坐标系中，O 为原点，$A(2,2)$，$B(3,m)$，$C(n,4)$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{OA}$，$P$ 为线段 BC 上一点，且 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BC}$.

(1)求 m，n 的值；

(2)当 $\lambda=\dfrac{3}{5}$ 时，求 $\cos\angle APC$；

(3)求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的取值范围.

20. (15 分)[2025·北京五中测试] 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $a=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$，_____.

在①$a\sin C=c\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$，②$(a+b+c)(b+c-a)=3bc$ 这两个条件中任选一个，将选的序号填在横线处，并回答下面的问题.

(1)若 $B=\dfrac{\pi}{4}$，求 b；

(2)若 $\triangle ABC$ 的周长为 $4\sqrt{6}$，求 $\triangle ABC$ 的面积 S.

注：若选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

21. (15 分)[2024·海淀期末] 已知 n 维向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，给定 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，定义变换 φ_k：选取 $i\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，再选取一个实数 x，对 $\boldsymbol{a}$ 的坐标进行如下改变，若 $i+k\leqslant n$，则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_{i+k}$ 同时加上 x，其余坐标不变；若 $i+k>n$，则将 $a_{i+1},a_{i+2},\cdots,a_n$ 及 $a_1,a_2,\cdots,a_{i+k-n}$ 同时加上 x，其余坐标不变. 若 $\boldsymbol{a}$ 经过有限次变换 φ_k(每次变换所取的 i，x 的值可能不同)后，最终得到的向量 $(t_1,t_2,\cdots,t_n)$ 满足 $t_1=t_2=\cdots=t_n$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 k 阶可等向量. 例如，向量 $(1,3,2)$ 经过两次变换 φ_2 可得 $(1,3,2)\xrightarrow{i=2,x=1}(2,3,3)\xrightarrow{i=1,x=-1}(2,2,2)$，所以 $(1,3,2)$ 是 2 阶可等向量.

(1)判断 $(1,2,3)$ 是否是 2 阶可等向量？说明理由.

(2)若取 1，2，3，4 的一个排序得到的向量 (a_1,a_2,a_3,a_4) 是 2 阶可等向量，求 a_1+a_3.

(3)若任取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一个排序得到的 n 维向量均为 k 阶可等向量，则称 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 k 阶强可等向量，求证：向量 $(1,2,3,4,5,6,7)$ 是 5 阶强可等向量.

数学

班级:_____ 姓名:_____ 得分:_____

单元素养测评卷(二)

第七章

(时间:120 分钟　分值:150 分)

一、选择题:本题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数 $z=1-2\mathrm{i}$ 的虚部是 (　　)

A. 1　　B. -2

C. $-2\mathrm{i}$　　D. 2

2. [2024·朝阳期末] 若复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=1-\mathrm{i}$,则 $z=$ (　　)

A. $1+\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$

C. $1-\mathrm{i}$　　D. $-1-\mathrm{i}$

3. [2025·顺义期中] 若复数 $z=2-3\mathrm{i}$,则 $|z|=$ (　　)

A. $2+3\mathrm{i}$　　B. $\sqrt{13}$

C. 5　　D. $\sqrt{5}$

4. [2025·北京汇文中学测试] 在复平面内,复数 $\mathrm{i}(\mathrm{i}-a)$ 对应的点的坐标为 $(-1,2)$,则实数 $a=$ (　　)

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

5. 复数 $z=\dfrac{|3-\mathrm{i}|}{2-\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于 (　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

6. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$,$\mathrm{i}^2=-1$,则"$a=b=1$"是"$(a+b\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 充要条件

C. 必要不充分条件

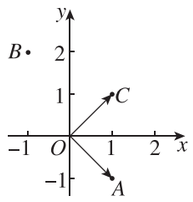
D. 既不充分也不必要条件

7. 复数都可以表示为 $z=|z|(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(0\leqslant\theta<2\pi)$,其中 $|z|$ 为 z 的模,θ 称为 z 的辐角的主值.已知复数 z 满足 $\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{z}=1+\mathrm{i}$,则 z 的辐角的主值为 (　　)

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$

C. $\dfrac{5\pi}{4}$　　D. $\dfrac{7\pi}{4}$

8. 已知复数 $z_1=1-\mathrm{i}$,$z_2=-1+2\mathrm{i}$(i 为虚数单位)在复平面内对应的点分别为 A,B,将向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕着点 O(O 为复平面内的原点)逆时针旋转 90° 得到向量 $\overrightarrow{OC}$,则 $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 (　　)



A. $-1+2\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$

C. $3\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

9. [2025·北京北大附中测试] 若复数 z 满足 $|z+\mathrm{i}|=3$,则在复平面内,复数 z 对应的点组成的图形的周长为 (　　)

A. 2π　　B. 4π

C. 6π　　D. 8π

10. 瑞士数学家欧拉于 1748 年提出了著名的欧拉公式:$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$,其中 e 是自然对数的底数,i 是虚数单位,该公式将指数函数的定义域扩大到复数,建立了三角函数与指数函数的关联,在复变函数论中占有非常重要的地位,被誉为"数学中的天桥".依据欧拉公式,下列选项正确的是 (　　)

A. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}$ 的虚部为 i

B. 复数 $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$ 在复平面内对应的点位于第二象限

C. $\sin x=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}$

D. 若 $z_1=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$,$z_2=\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}$ 在复平面内分别对应点 Z_1,Z_2,则 $\triangle OZ_1Z_2$ 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}$

二、填空题:本题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. [2025·海淀期末] 已知复数 z 满足 $\mathrm{i}\cdot z=1+\mathrm{i}$,其中 i 为虚数单位,则 z 的虚部为_____.

12. [2025·丰台期中] 已知复数 $z=\dfrac{a+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}(a\in\mathbf{R})$ 为纯虚数,则 $a=$_____.

13. 欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 把自然对数的底数 e、虚数单位 i、三角函数 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 联系在一起,充分体现了数学的和谐美,被誉为"数学中的天桥".若复数 z 满足 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}+\mathrm{i})\cdot z=\mathrm{i}$,则 z 的虚部是_____,$|z|=$_____.

14. [2024·北京八十中测试] 设复数 z 满足 $|z+2\mathrm{i}|+|z-2\mathrm{i}|=4$,则 $|z-1-\mathrm{i}|$ 的取值范围是_____.

15. 若复数 $z=x+y\mathrm{i}(x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R})$,$z_1=-2$,$z_2=-\dfrac{1}{2}$,$z_3=\mathrm{i}$ 在复平面内对应的点分别为 Z,Z_1,Z_2,Z_3,复数 z 满足 $|z-z_1|=2|z-z_2|$,且 $\overrightarrow{Z_1Z}=\lambda\overrightarrow{Z_1Z_2}+\mu\overrightarrow{Z_1Z_3}(\lambda\in\mathbf{R},\mu\in\mathbf{R})$,则 $3\lambda+2\mu$ 的最大值为_____.

三、解答题:本题共 6 小题,共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

16. (13 分)[2026·北京潞河中学测试] 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})\cdot z=3+\mathrm{i}$,其中 i 为虚数单位,其共轭复数为 $\overline{z}$.

(1)求复数 z 和 $|z|$;

(2)若 $z\cdot\overline{z}=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,求实数 a,b 的值.

17. (14 分)已知复数 $z=(m^2-6m+8)+(m-2)\mathrm{i}(m\in\mathbf{R})$.

(1)若复数 z 为纯虚数,求实数 m 的值;

(2)若复数 z 在复平面内对应的点位于第二象限,求实数 m 的取值范围.

基础教育行业专研品牌 全品 SINCE 1992 30+年专注教育行业

18. (14 分)在复平面内,点 A,B,C 对应的复数分别为 $z_1=1+\mathrm{i}$,$z_2=5+\mathrm{i}$,$z_3=3+3\mathrm{i}$.

(1)求向量 $\overrightarrow{AB}$ 及 $\overrightarrow{AC}$ 的坐标;

(2)若以 AB,AC 为邻边作平行四边形 $ABDC$,求点 D 对应的复数 z_4 及 AD 的长.

19. (14 分)已知复数 $z_1=\cos\theta-\mathrm{i}$,$z_2=\sin\theta+\mathrm{i}$,其中 $\theta\in\mathbf{R}$.

(1)求 $z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$ 的值;

(2)求 $|z_1z_2|$ 的最大值并说明取得最大值时 θ 的取值集合.

20. (15 分)在复平面内,O 是坐标原点,向量 $\overrightarrow{OZ_1}$,$\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数分别为 $z_1=1-2\mathrm{i}$,$z_2=3+a\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$.

(1)求 $|z_1+z_2|$ 的最小值;

(2)若 $\overrightarrow{OZ_1}\perp\overrightarrow{OZ_2}$,求实数 a 的值;

(3)若复数 $\dfrac{z_2}{z_1}$ 对应的点在第一象限,求实数 a 的取值范围.

21. (15 分)(1)对实系数的一元二次方程可以用求根公式求复数范围内的解,在复数范围内解方程 $3x^2+2x+1=0$.

(2)对一般的实系数一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$,由于总可以通过代换 $x=y-\dfrac{b}{3a}$ 消去其二次项,就可以变为方程 $y^3+py+q=0$.在一些数学工具书中,我们可以找到方程 $x^3+px+q=0$ 的求根公式,这一公式被称为卡尔丹公式,它是以 16 世纪意大利数学家卡尔丹(J. Cardan)的名字命名的.

卡尔丹公式的获得过程如下:三次方程 $x^3+px+q=0$ 可以变形为 $x^3=-px+(-q)$,把未知数 x 写成两数之和 $x=m+n$,再把等式 $x^3=(m+n)^3$ 的右边展开,就得到 $x^3=m^3+n^3+3mn(m+n)$,即 $x^3=3mnx+(m^3+n^3)$.将上式与 $x^3=-px+(-q)$ 相对照,得到 $\begin{cases}3mn=-p,\\ m^3+n^3=-q,\end{cases}$ 把此方程组中的第一个方程两边同时作三次方,得 $\begin{cases}m^3n^3=\left(-\dfrac{p}{3}\right)^3,\\ m^3+n^3=-q,\end{cases}$ 并把 m^3 与 n^3 看成未知数,解得 $\begin{cases}m^3=-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3},\\ n^3=-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3},\end{cases}$ 于是,方程 $x^3+px+q=0$ 的一个根可以写成 $x=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{q}{2}\right)^2+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3}}$.

阅读以上材料,求解方程 $x^3-3x^2-12x+10=0$.